MISE A NIVEAU (PRE-REQUIS)

Calcul algébrique

Définitions

- **Un nombre positif** est un nombre plus grand que zéro; un nombre négatif a une valeur inférieure à 0. L'ensemble des nombres positifs et des nombres négatifs forme les nombres relatifs.
- **L'opposé** d'un nombre est ce nombre, changé de signe; **l'inverse** d'un nombre est le résultat de la division de 1 par ce nombre.
- La **valeur absolue** d'un nombre est la valeur de ce nombre lorsqu'on supprime son signe; il en ressort que la valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre, et que celle d'un nombre négatif est l'opposé de ce nombre.

Règles de calcul

- **Addition**: pour ajouter un nombre négatif à une valeur donnée, on retranche de cette valeur la valeur absolue du nombre négatif. Par exemple, 4+(-2)=4-2=2
- **Soustraction**: pour soustraire un nombre négatif d'une donnée, on ajoute à cette donnée la valeur absolue du nombre négatif . Par exemple, 4-(-2) = 4 + 2 = 6
- **Multiplication**: le résultat de la multiplication de deux nombres relatifs est égal au produit de leurs valeurs absolues, affecté:
  - du signe + si les deux nombres ont le même signe (+ et +, - et -)
  - du signe - si les deux nombres sont de signe contraire (- et +, ou + et -)
- **Division**: le résultat de la division de deux nombres relatifs est égal au quotient des valeurs absolues de ces deux nombres, affecté du signe + ou - selon la règle précédente (dite "règle des signes").

Conventions d'écriture

On peut ignorer l'écriture du signe + devant un nombre si cet oubli ne crée pas d'ambiguïté.

Exercices

(+6)-(-3)=

(-2)*(-6)=

(-3)*(+3)=

(+5)/(-2)=

Interpolation

Sous ce terme se cache… la vieille règle de trois! Ce procédé de calcul permet de calculer une valeur inconnue à partir de données connues, en supposant que ces données sont proportionnelles entre elles.

Exemple: On note l'indication du loch (mesure de la distance) d'un bateau; à 9h, il indique 2551,5 milles à 14 heures 2628,1 milles. On veut chercher quelle était la valeur indiquée par ce loch à 11 heures.

On raisonne alors de la manière suivante: si en (14-9)=5 heures le bateau a parcouru (2628,1-2551,5)=76,6 milles, il parcourt en une heure 76,6/5=15,32 milles et en 2 heures (différence entre 11h et 9h), il parcourt 30,64 milles. A 11 heures, le loch indique donc (2551,5+30,64)=2582,14 milles[1].

Cette méthode repose toutefois sur une hypothèse: la constance de la vitesse de ce navire. Plus l'écart de temps est important, plus cette hypothèse est difficile à maintenir. Donc, si l'on n'est pas certain d'avoir une vitesse constante dans un grand intervalle de temps, la seule solution est de prendre des intervalles de temps assez petits, dans lesquels la vitesse peut être considérée comme fixe.

On utilisera cette technique pour le calcul des marées; la vitesse de montée de l'eau n'est certes pas constante, mais on choisira des intervalles de temps assez courts pour considérer que la vitesse y est constante, mais variable d'un intervalle à l'autre.

Le système sexagésimal (heures/angles)

Définition

Le **système sexagésimal** est un système de numération à base 60. Il est essentiellement utilisé pour la mesure du temps, des angles et pour préciser des coordonnées géographiques. En fait, le système dit "sexagésimal" est un mélange de numération à base 10 (à l'intérieur de chaque groupe: minutes, heures, degrés…) et de numération à base 60 (une heure vaut soixante minutes).

Le système habituellement utilisé, pour mesurer, par exemple, des longueurs, des poids… est le système **décimal**, à base 10: un nombre s'écrit sous la forme d'une suite de chiffres; cette suite est ordonnée, c'est à dire que la position de chacun des chiffres du nombre influe directement sur la valeur du nombre: on définit ainsi le chiffre des unités, des dizaines, des centaines… Ce qui est à la base de ce système, c'est qu'un chiffre a un "poids" dix fois supérieur à celui du chiffre situé immédiatement à sa droite, et dix fois inférieur à celui du chiffre situé immédiatement à sa gauche.

Dans ce système décimal le rôle de la virgule est très important: elle permet de définir des sous-multiples décimaux. Dans le système sexagésimal pur, il n'y a pas de virgule, les unités changent de nom: heures, minutes, secondes… Toutefois, le mélange de numérotation à base 10 et à base 60, signalé plus haut, fait que les unités les plus petites (seconde de temps, seconde d'angle) bénéficient de l'utilisation de cette virgule: on parlera de 9,95s aux 100 mètres, d'un angle de 2° 12' 23,875". La tendance actuelle, apparue avec les systèmes positionnement par satellites (GPS), est d'exprimer les angles en degrés, minutes et fractions décimales de la minute, comme 2°12,578'. La seconde est ainsi oubliée.

Utilisations du système sexagésimal

Deux types de mesure sont exprimées en système sexagésimal (ou du moins en partie): les durées et les angles.

Mesure des durées (et du temps)

On utilise les jours, heures, minutes et secondes:

- Une minute vaut 60 secondes (la seconde est par ailleurs une unité fondamentale du système SI, son symbole est la lettre s; l'abréviation de la minute est min., et non ', qui est celle de la minute d'angle)
- Une heure vaut 60 minutes, donc 60*60=3600 secondes (abréviation: h.);
- Un jour vaut 24 heures, donc 60*24=1440 minutes ou 60*1440=86 400 secondes (abréviation: j.)

[1] Merci à MO qui m'a signalé une erreur récurrente!

Mesure des angles

On utilise les degrés, minutes et secondes.

- Le degré (symbole: °) est défini comme la 1/360ème partie du cercle; un cercle entier couvre donc un angle de 360°, un demi-cercle (angle plat) 180°, un quart de cercle (angle droit) 90°…
- La minute (d'arc) est le 1/60ème de degré, son symbole est ' . Un cercle entier vaut donc 60*360=21 600 minutes.
- La seconde (d'arc) est le 1/60ème de la minute; son symbole est ". Toutefois, la généralisation de systèmes de positionnement par satellites a rendu obsolète l'utilisation de la seconde d'arc au bénéfice de l'expression en minutes et sous-multiples décimaux de la minute. C'est ainsi qu'un angle de 32' 30" s'écrira plus souvent sous la forme 32,5' (30" représentent la moitié de 1', ou 0,5').

Opérations élémentaires

Rappelons tout d'abord le principe des "retenues", dans le système à base 10: si un nombre correspondant à l'addition de 2 chiffres dépasse 10 (ex.: 8+7=15), on n'écrit que le chiffre des unités (ici, 5) de ce nombre ainsi généré, et on "ajoute" une unité au résultat de l'addition élémentaire suivante (on commence les opérations élémentaires de la droite vers la gauche). Par exemple, si on calcule 49+15, on commence par ajouter 9 et 5, ce qui fait 14. On "garde" le chiffre 4 comme résultat, et on ajoute 1 (la retenue) au résultat de la deuxième addition élémentaire "4+1", ce qui donne 6.

Il en est de même pour la soustraction: si on veut calculer le résultat de 82-48, comme on ne peut effectuer "2-8", on ajoute à 2 la valeur 10, et parallèlement on soustrait "1" au chiffre des dizaines du nombre "82"; on a ainsi généré une retenue de "-1".

Dans le système sexagésimal, on procède de la même façon: dès que le résultat d'une addition dépasse 60 (exemple: 45 minutes + 32 minutes=77 minutes), on retranche 60 (comme on retrancherait 10 dans le système décimal); il reste donc 17 minutes, et la "retenue" est de 1 heure.

En ce qui concerne les multiplications ou les divisions d'une nombre sexagésimal par un nombre décimal, le plus simple est de convertir la donnée en son sous-multiple, d'effectuer l'opération sur des nombres maintenant décimaux et, à la fin, de retransformer le résultat en nombre sexagésimal. Il en est de même pour les divisions de deux nombres sexagésimaux entre eux (utilisé par exemple pour les calculs de marées); toutefois certaines calculatrices permettent ce calcul en notation symbolique.

Exemple 1: Combien de temps s'écoule entre 10h15min1s et 14h7min17s?

Il faut effectuer la soustraction (14h7min17s-10h15min1s)

Première méthode: comme dans le système décimal, on commence par la colonne la plus à gauche: ici, c'est celle des secondes: 17s-1s=16s. On continue par la colonne des minutes: 7min-15min. Cette soustraction est impossible en nombres positifs. On est donc amené à "prendre" 1 heure (soit 60 min) de la colonne des heures, et à calculer maintenant 60+7-15=52 minutes. Enfin, on calcule les heures en se rappelant de soustraire une heure à "14", puisque on l'a "utilisée" pour le calcul de minutes. Le nombre d'heures est donc (14-1)-10=3 heures.

Deuxième méthode: on transforme toutes les valeurs avec comme unité le sous-multiple le plus petit. Ici, c'est la seconde. 14h7min1s=((14*60)+7) minutes+17 secondes, soit ((14*60)+7)*60+17 secondes, ou 50837 s. De même, 10h15min1s est égal à 36901 secondes, et la différence est donc 13936 s.

Il faut maintenant écrire ces 13936 secondes en heures, minutes et secondes. On effectue pour cela la division 13936/60, qui donne comme résultat 232 et comme reste 16: 13936 s =

232 min + 16s. On exprime maintenant, par la même méthode, les 232 minutes: 232=(60*3)+52. Donc le résultat est: 3 heures 52 minutes 16s

Exemple 2: partager un angle de 106° 27' en trois parties égales.

On ne va pas effectuer la division dans le système sexagésimal (bien que cela soit tout à fait possible), mais on va convertir l'angle en minutes (le sous-multiple le plus petit présent). 106°=106*60=6360', et la valeur de l'angle est donc de 6387'. Le tiers de cette valeur est 2129', qu'on convertit, dans le sens inverse, en degrés et minutes: 2139=60*35+29; le résultat est donc 35°29'.

Exemple 3: Partager un angle de 100° 22' en quatre parties égales.

On utilise la même méthode en convertissant en minutes: 100°=6000', l'angle vaut donc 6022' et le quart est 1505,5'. Le problème qui apparaît alors est l'existence d'un chiffre après la virgule. Ceci ne pose pas de difficulté, si on se rend compte que c'est la traduction d'une demi-minute à ajouter à 1505'. Cette ½ minute vaut 30", et comme 1505=60*25+5, le résultat final est donc 25°5'30"

Nota: on aurait pu simplifier le problème en remarquant que 100 est divisible par 4, et qu'il suffisait d'ajouter au résultat de cette division, soit 25°, celui de celle de 22/4=5,5 ou 5'30".

Exemple 4: partager un intervalle de 1h 1min 1s en onze parties égales

On ramène tout dans le sous-multiple le plus petit, ici les secondes: 1h=3600 s; 1 min=60 s, donc la donnée est égale à 3661 secondes. Le onzième est égal à 332,82s. Contrairement au cas précédent, la partie décimale de ce résultat est gardé tel quel (il n'y a pas de sous-multiple sexagésimal de la seconde).

Comme 332=60*5+32, le résultat est donc 5 min 32,82 s.

Exercice 1: effectuer la soustraction 9h16min-3h48min

Exercice 2: quel est le sixième de l'intervalle précédent?

Exercice 3: donnez la valeur obtenue en ajoutant le résultat précédent à 3h48min

Exercice 4: donnez la suite des valeurs obtenues en ajoutant au résultat précédent la même valeur (le résultat de l'exercice 3) et en recommençant ainsi de suite

Notions de congruence et de modulo

. Supposons qu'on effectue la sommation d'angles, et que la somme dépasse 360° (soit un tour entier). Le résultat doit faire "enlever" ces 360° pour obtenir une valeur utilisable. C'est par exemple le cas d'un bateau qui tourne dix fois de 45° sur le même côté; le résultat ent un virage de 450°, dont la valeur effective est en fait 450-360=90°. On dit que 450 et 90 sont congrus entre eux modulo 360, ce qui s'exprime, sous forme mathématique, par:

$$450 \equiv 90 \pmod{360}$$

Ceci signifie fondamentalement que, si on fait un tour de 450°, ceci correspond à un tour de 90°.

Utilisation d'une calculatrice

Les calculatrices, même les plus basiques, permettent de faciliter ce genre d'opérations, en particulier si les valeurs peuvent être rentrées sous forme symbolique (h/min/s). Sinon l'existence d'une fonction "division euclidienne" peut aider à certains calculs. Nous nous servirons ici de la CASIO FX 92, qui coûte moins de 10€! son utilisation 'basique" est décrite à la fin de ce chapitre, et l'application au calcul des marées sera étudiée dans le chapitre spécifique.

Applications maritimes

Application 1: le mille marin et le noeud.

Initialement, le mille marin ou mille nautique (en abrégé:MN, ou NM en anglais, parfois représenté par le symbole ', à cause de son origine) est la longueur mesurée sur un grand cercle de la circonférence terrestre (comme, par exemple, l'équateur) correspondant à un angle de une minute (d'où l'abréviation ').

L'équivalent en mètres peut se calculer facilement, en se rappelant que la circonférence de la Terre est de 40 000 Km, ou 40 000 000 m, que cette circonférence correspond à 360° (puisque c'est la valeur d'un angle correspondant à un cercle entier) et qu'il y a 60' dans un degré. Un angle de 1' correspond donc à une distance de: $\frac{40000000}{360 * 60}$ soit 1 851,852 mètres.

A partir de ce mille marin on peut définir une unité de vitesse. La vitesse, par définition, est le rapport entre une distance et le temps mis pour la parcourir. Si la distance est exprimée en kilomètres et la durée en heures, l'unité est le Km/h (kilomètre **par** heure).

En navigation, on exprime les distances en MN et les durées en heures; l'unité de vitesse s'appelle alors le mille (nautique) par heure, qui est appelé nœud (abréviation: nd, ou en anglais: knot, abrégé en kn). Cette appellation est toutefois, au sens strict, un "abus de langage": le nœud correspondait à une distance, égale à 1/120 de MN, qui séparait des nœuds, placés régulièrement sur une corde. Pour estimer la vitesse d'un bateau, on jetant dans l'eau une planche (qui permettait d'immobiliser l'extrémité de la corde dans l'eau), et on comptait en une demi-minute (soit 1/120 d'heure) le nombre de nœuds qui "filaient" entre les doigts du préposé au calcul; cette valeur correspondait à vitesse du bateau en MN/h.

En résumé: l'unité de distance en navigation est le mille nautique (MN), correspondant à un arc de 1' sur un grand cercle terrestre; il vaut 1 852 mètres. L'unité de vitesse, correspondant à un mille par heure, s'appelle le nœud et vaut 1 852 mètres par heure.

Astuce: pour transformer des nœuds en Km/h, il suffit de doubler les nœuds et d'en enlever "un peu plus" du dixième.

Un "loch". Remarquez les nœuds sur le filin, relié à la planchette qui le "fixe" dans l'eau
Merci à AD, qui a repéré la chose et l'a immortalisée...

Application 2: Calcul des distances sur une carte

Le mille est défini par rapport à un grand cercle de la circonférence terrestre. Un grand cercle, c'est le cercle de plus grand diamètre qui existe sur une sphère déterminée (la Terre, une boule de pétanque…). En particulier, sur la Terre, tous les cercles qui passent par les deux pôles sont des grands cercles. On les appelle des méridiens. A l'opposé, les cercles parallèles à l'équateur (appelés parallèles) ne sont pas des grands cercles. Ces deux types de cercles (méridiens et parallèles) sont utilisés systématiquement pour le repérage sur une carte, et y figurent toujours. Rappelons que le mille marin, qui correspond à une distance mesurée sur un grand cercle, est égal à la distance qui sépare, sur un méridien, donc sur les graduations verticales de la carte, deux points situés de 1'.

Pour mesurer une distance sur une carte, il suffit donc simplement de repérer la distance séparant les deux points dont on veut connaître l'éloignement, grâce à un compas à pointes sèches, de reporter cette distance sur l'échelle verticale de la carte et de compter le nombre de minutes correspondant à cette distance; on a ainsi directement la mesure en milles nautiques.

Application 3: intervalles horaires; l'heure-marée

On a vu plus haut comment calculer la différence entre deux moments, et comment partager cet intervalle en parties égales. En précisant l'origine des valeurs de l'exercice déjà vu, on peut le mettre sous la forme d'un problème:

Dans un port de l'Atlantique, la basse mer a lieu à 3h48min et la haute mer à 9h16. Pour des raisons qui seront vues plus bas (cours sur les marées), on se propose de calculer les heures qui correspondent à des intervalles égaux au sixième de celui qui sépare la basse mer de la haute mer.

Pour résoudre ce problème, il faut déjà déterminer l'intervalle horaire qui sépare PM et BM. Comme on va être amené à partager cet intervalle en 6, on peut soit calculer directement cette valeur et la convertir en minutes, soit convertir les données en minutes et effectuer la soustraction.

Par la première méthode, en effectuant une retenue (16-48<u>+60</u>) on trouve 5h28min et par la deuxième: 9h16=(9*60)+16=556 minutes; 3h48=(3*60)+48=228 minutes, et la différence est de 328 minutes, valeur qui est équivalente à celle déjà trouvée: 5h28min =5*60+28=328.

On va maintenant chercher la valeur du $1/6^{ème}$ de cet intervalle, en conservant l'écriture sous forme de minutes: 328 = 6*54 + 4; le 1/6 vaut donc 54 minutes et 4/6 de minute, soit 40 secondes.

Enfin, on va ajouter des multiples successifs de cette valeur à l'heure de BM pour obtenir ce qu'on appelle les heures-marées. On peut le faire soit en prenant la forme (heure, minute, seconde) soit, plus simplement, en gardant la forme sous forme de minutes et en convertissant en h min s:

Première heure-marée: 228 + 1*(328/6) = 282+4/6 min soit 282min 40s ou 4h 42min 40 s
Deuxième heure marée: 228+2*(328/6) = 337+2/6 min soit 337min 20s ou 5h 37min 20 s
Troisième heure-marée: 228+3*(328/6) = 392 minutes, soit 6h 32 min
Quatrième heure-marée: 228+4*(328/6) = 446+4/6 min soit 446 min 40s ou 7h 26min 40s
Cinquième heure-marée: 228+5*(328/6)=501 +2/6 min soit 501 min 20 s ou 8h 21min 20s
Bien sûr, la sixième heure-marée correspond à la pleine mer: 9h 16min.

Mesure des angles

La mesure des angles sur une carte marine est une pratique de routine, permettant entre autres de se placer correctement sur cette carte. C'est donc une technique qui doit être bien maîtrisée.

La mesure des angles se fait habituellement à l'aide d'un rapporteur, demi-cercle gradué en degrés. Du fait de l'importance de cette mesure en navigation, des instruments spécifiques ont été développés. Ils seront envisagés dans un autre chapitre, mais leur principe est le même: ils donnent la valeur de l'angle que fait une direction donnée (par exemple, la ligne joignant deux points d'une carte) avec le nord.

La rose des vents

Elle correspond aux différentes directions privilégiées qu'on rencontre sur une carte marine.

Dans une carte marine, le nord est, conventionnellement, place "en haut" de la carte, et les angles mesurés dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de cette position:

- ❍ Le nord correspond donc à un angle de 0°
- ❍ L'est (situé en direction du bord gauche de la carte) fait un angle de 90° avec le nord;
- ❍ Le sud, situé à l'opposé du nord, fait avec lui un angle de 180°
- ❍ L'ouest, enfin, fait avec le nord un angle de 90°, mais comme il faut toujours mesurer les angles dans le sens des aiguilles d'une montre, il faut en fait décrire ¾ de cercle, soit 270°.

Outre ces quatre points cardinaux, on définit des directions "intermédiaires", faisant un angle de 90°/2, soit 45° avec les directions principales: le nord-est, entre nord et est; le sud-est, entre est et sud; le sud-ouest, entre sue et ouest; enfin, le nord-ouest, entre nord et ouest.

Enfin, on peut "partager" chacun de ces intervalles en deux parties, définissant ainsi des angles de 45°/2, soit 22°30':

- ❍ Nord-nord-est: à 22°30' du nord;
- ❍ La direction nord-est: à 45° du nord (voir plus haut);
- ❍ L'est-nord-est à 67°30';
- ❍ L'est est à 90°

Exercice: compléter cette liste jusqu'au nord-nord-ouest..

Le rumb, ou quart

C'est une sous-division, qui est tombée en désuétude. Si on veut encore continuer dans la division "en deux" des intervalles, on tombe sur un problème de dénomination: entre "nord-est" et "est-nord-est", comment appeler l'élément intermédiaire? On est amené à faire alors des conventions d'expression: la dénomination des points cardinaux avec les "quarts" est la suivante: le quart en question est celui situé entre le point cardinal désigné par la première partie de l'énoncé et celui obtenu en préfixant ce point cardinal avec la deuxième partie de la dénomination. Ainsi, "nord-est quart est" correspond à une direction située entre le nord-est (première partie de l'énoncé) et l'est nord est (obtenu en préfixant le point obtenu précédemment: "nord-est" par la deuxième partie: "est"). De même, la direction "est quart nord est" sera donc située entre l'est et l'est-nord-est soit, comme vu ci-dessus, entre 67°30' et 90°, donc (157,5)°/2=78°45'.

Différence angulaire

Quand on cherche à connaître l'angle que font deux directions, on peut se servir du rapporteur pour établir cette valeur, mais il faut faire attention toutefois au signe: si on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle est positif, mais négatif dans le sens contraire… En fait, la manière la plus simple est de mesurer l'angle que font chacune de ces directions avec le nord, puis de soustraire algébriquement l'une de l'autre, en vérifiant le signe du résultat.

Convention 1: bâbord et tribord

Le côté bâbord d'un bateau est son côté gauche, en regardant la proue (avant) à partir de la poupe (arrière). Le côté tribord est le côté droit, dans les mêmes conditions.

Puisque on compte les angles dans le sens des aiguilles d'une montre, si un bateau infléchit sa course sur son bâbord il va diminuer l'angle qu'il fait avec le nord; ceci revient à lui ajouter un nombre négatif. À l'opposé, si le bateau dévie vers son tribord, l'angle qu'il fait avec le nord va augmenter; celui-ci va donc être augmenté d'un nombre positif.

Donc:

Quand un bateau subit une dérive, celle-ci se traduit, en termes de navigation, par l'ajout d'un nombre positif si la dérive se fait sur tribord, d'un nombre négatif si la dérive se fait vers bâbord.

Convention 2: sens du vent, du courant, d'une route.

Par convention:

- Dire que le vent vient du xxx°, signifie que, si on se place face au vent, cette direction fait avec le nord un angle de xxx°.
- On dit qu'on relève tel amer à yyy° quand, se plaçant en direction de cet amer, on fait avec le nord un angle du yyy°; de même, on dit qu'on fait route au yyy quand la direction de la route fait avec le nord un angle de yyy°.
- On dit qu'un courant porte au zzz° quand, regardant dans le sens du courant, on mesure un angle de zzz° entre le nord et cette direction.

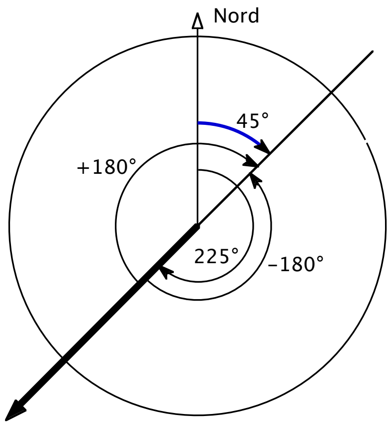
Il faut donc bien individualiser le courant: il est mesuré dans le sens opposé à celui d'un relèvement ou celui de la direction du vent.

En pratique, si on connaît la direction vers laquelle porte le courant (c'est à dire vers laquelle il entraîne le bateau), on peut connaître celle d'où il vient en ajoutant 180°, quitte à enlever 360° du résultat s'il dépasse cette valeur (les angles sont en effet définis à 360° près: un angle de 45° et un angle de 405° sont équivalents).

Exemple: un courant porte au 225°. D'où provient-il?

On ajoute donc 180° à 225°, ce qui fait 405°, qui est équivalent à 45°.

On aurait également pu retrancher 180° de 225°, ce qui donne bien le même résultat, comme représenté sur la figure.



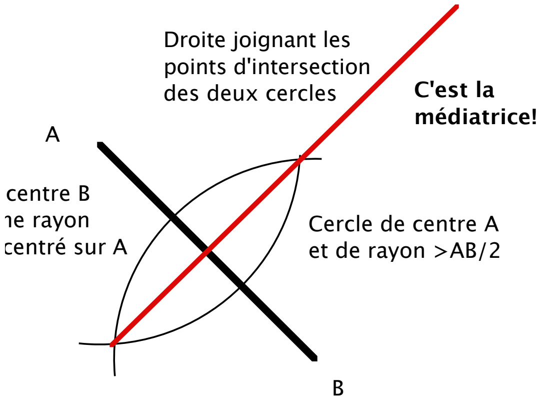
GEOMETRIE

Les "rappels" de géométrie ici présentés sont soit des définitions, soit des "recettes de cuisine" dont seule l'application pratique est intéressante. Il n'y aura aucune démonstration (sauf si vous insistez…).

Médiatrice d'un segment.

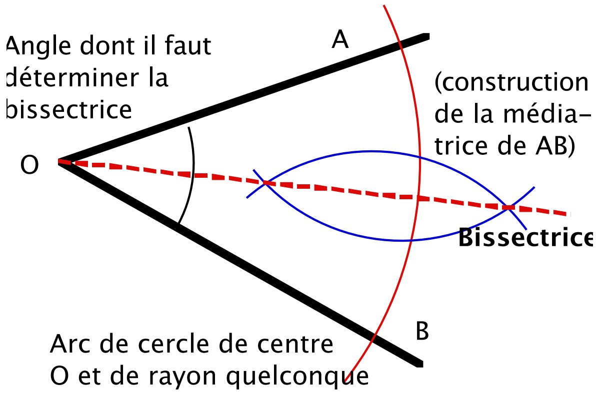
Par définition, la médiatrice d'un segment est une perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu. Cette médiatrice est l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment.

La médiatrice d'un segment AB peut être construite avec un compas et une règle: de chacune des deux extrémités du segment on trace deux arcs de cercle. Ils se coupent en deux points (il faut pour cela choisir le rayon supérieur à la moitié de la longueur AB!). La droite qui joint les deux points d'intersection est la médiatrice du segment AB.



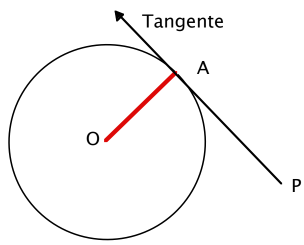
Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet de l'angle, qui partage celui-ci en deux parties égales. Elle peut être construite avec compas et règle: du sommet, on trace un arc de cercle de rayon quelconque qui coupe les deux côtés de l'angle en deux points A et B. On détermine alors la médiatrice de AB (voir paragraphe précédent): de chacun de ces deux points on trace un arc de cercle et on joint les points d'intersection; la demi-droite qui les joint (et qui doit passer par le sommet de l'angle, si la construction est bien faite) est la bissectrice de l'angle.



Cercle

Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de la surface qui sont à la distance R du point O. Si, à un cercle, on mène par un point P extérieur à celui-ci, une droite tangente en A sur le cercle, le rayon du cercle OA et la tangente sont perpendiculaires entre eux au point A.



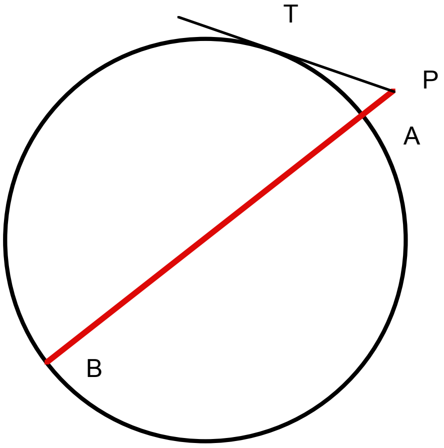
Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (c'est à dire des côtés qui forment l'angle droit).

Cercle de visibilité; portée d'un phare

Du fait de la rotondité de la Terre, la vision des objets "à ras d'eau" est limitée par un cercle, appelé cercle d'horizon. Si l'objet est situé à une certaine hauteur (tel un phare), il sera visible si le cercle d'horizon du phare d'une part et de l'observateur d'autre part ont une surface commune.

On montre que la portée géométrique d'un phare, situé à une hauteur h_1, vu par un observateur situé à une hauteur h_2, est donnée par la formule: $P = 2{,}2 \bullet \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)$ (la démonstration qui suit n'est pas à connaître! C'est uniquement pour les curieux…)



Dans la figure ci-contre, la puissance du point P (figurant l'observateur) par rapport au cercle peut être écrite sous deux formes: PAxPB et PTxPT, ou PT^2. PT est le rayon du cercle d'horizon vu de P.La hauteur h de l'observateur (soit AP) est très faible devant AB; on peut donc assimiler PB=h+AB à AB, soit 2R, où R est le rayon de la Terre. On peut donc écrire $P^2 = 2R \bullet h$, ou $P = \sqrt{2R} \bullet \sqrt{h}$. Si on s'exprime en mètres, 2R=2*6400000m et P vaut $3577 \bullet \sqrt{h}$ ou, si on exprime P en milles, $\frac{3577}{1852}\sqrt{h} = 2{,}082\sqrt{h}$.

Du fait des phénomènes de diffraction de la lumière, le coefficient est un peu plus important et égal à 2,20.

Cette portée géométrique, ainsi calculée, peut être immédiatement généralisée à un observateur et un phare; aboutissant à la formule déjà proposée. Donc:

> La portée géométrique d'un phare, situé à une altitude H vu par un observateur situé à une altitude h est donnée par la formule $D = 2{,}20 * \left(\sqrt{H} + \sqrt{h}\right)$

Il en va de même pour la portée d'un radar, si ce n'est que le mode de propagation des ondes fait que le coefficient est un peu plus important; 2,8.

Il faut faire attention à ce qu'on appelle la portée. Cette portée peut être définie de la manière ci-dessus (portée "géométrique"), qui ne tient pas compte de la puissance lumineuse ni des phénomènes météorologiques; la portée "optique", quant à elle, est une limite, tenant compte uniquement de la puissance d'émission (avec éventuellement les amplifications optiques), dans un environnement clair, et sans prendre en jeu ni la hauteur du foyer ni celle de l'observateur; des abaques particuliers permettent de calculer cette portée.

Les arcs capables

Nota: ce chapitre est nécessaire à la compréhension d'une méthode de positionnement qui n'est pas explicitement au programme du PH. C'est la raison pour laquelle il est classé comme "non indispensable".

Position du problème: il faut trouver l'ensemble des points qui permettent de "voir" un segment du plan sous un angle constant.

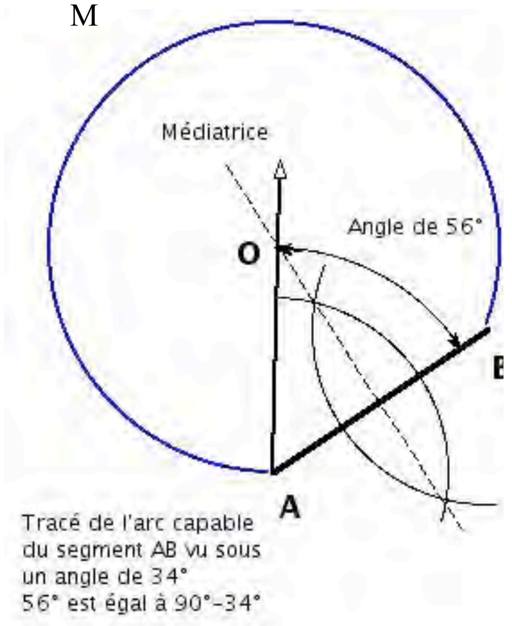
Solution: on montre que cet ensemble est une partie d'un cercle, qui passe par les deux extrémités du segment, appelé "arc capable". Le centre de ce cercle est situé sur la médiatrice du segment, à l'intersection de celle-ci et d'une demi-droite, passant par une des extrémités du segment, et faisant avec celui-ci un angle égal à:

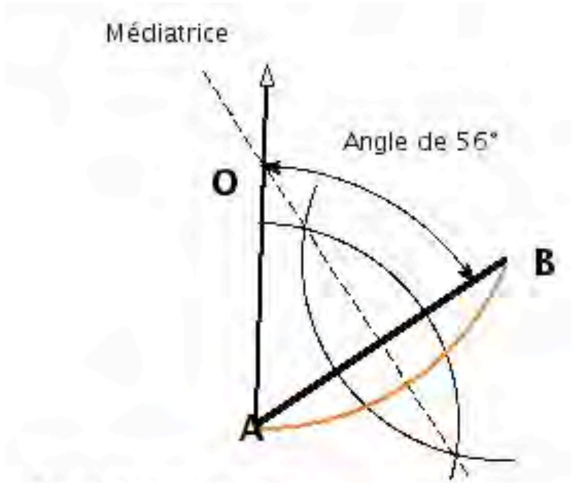
- 90°-â (où â désigne l'angle sous lequel on doit voir le segment) si â est inférieur à 90°; l'arc capable est alors la partie du cercle située du côté du centre du cercle;
- â – 90° si â est compris entre 90 et 180°. L'arc capable est alors la partie du cercle du côté opposé au centre du cercle, par rapport au segment.

C

N

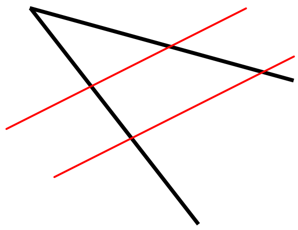
M





Tracé de l'arc capable de [AB] vu sous un angle de 146°: de A on mène une demi-droite faisant avec AB un angle de 146-90=56°

Théorème de Thalès



Ce théorème (qui ne sera pas démontré!) trouve son application en navigation, en particulier lors du calcul des routes fond et surface.

Considérons un ensemble de droites parallèles (deux suffisent!) coupées par des droites quelconques (schéma ci-contre). Le théorème de Thalès énonce que:

AC/AN=AB/AM=BC/MN

Notions de calcul vectoriel

Définition d'un vecteur

Un vecteur est un segment de droite, orienté (c'est à dire présentant un sens) de son origine vers son extrémité, possédant une longueur (ou module), une direction et un sens.

Un vecteur est défini par l'indication du segment qui le définit surmonté d'une flèche, ou par un symbolisme spécifique (vecteur vitesse…).

L'utilisation de vecteurs permet de définir graphiquement une valeur de façon plus complète qu'avec un nombre. C'est le cas de forces, de vitesses…

Des vecteurs égaux sont des vecteurs de même sens, même direction, même module mais dont le point d'application (origine du segment) est différent. On les appelle parfois vecteurs équipollents.

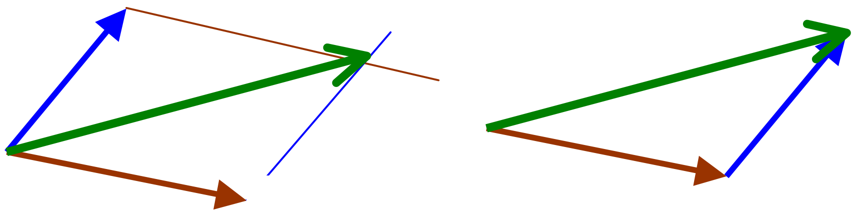
Somme de vecteurs

Supposons deux forces, appliquées au même point, de direction et d'intensité différentes. On montre que ces deux forces concourantes peuvent être représentées par une seule force, appelée résultante, qui s'applique au point commun aux deux forces précédentes, et dont la valeur est la somme vectorielle des deux forces.

Cette somme vectorielle est construite de la façon suivante:

Résultante F2

- Méthode 1: on construit le parallélogramme dont deux côtés successifs sont les deux forces dont on cherche la résultante. Celle-ci est égale à la diagonale du parallélogramme issue du point commun aux deux forces.
- Méthode 2: par l'extrémité du premier vecteur, représentatif de la première force, on trace un vecteur égal au deuxième vecteur (donc de même direction, même sens, même longueur). L'extrémité de ce deuxième vecteur est également celle de la résultante des deux forces, appelée somme des deux vecteurs..



Les deux constructions pour obtenir la résultante de deux forces

Produit d'un vecteur par un nombre

Le problème se pose par exemple quand le vecteur représente une vitesse, et qu'on veut tracer le vecteur correspondant à une vitesse double. Le produit d'un vecteur par un nombre est un vecteur, de même direction, de même sens si le nombre est positif et de sens inverse si le nombre est négatif, et dont le module (la longueur) est celui du vecteur initial multiplié par la valeur absolue du nombre: in bateau ayant une vitesse trois fois supérieure à celle d'un autre aura un vecteur vitesse trois fois plus important.

En particulier, si le nombre qui multiplie le vecteur et "-1", on obtient le vecteur opposé: même module, même direction mais sens opposé. Ce peut être le cas de bateaux de même vitesse mais de sens opposés.

Différence de deux vecteurs

Pour effectuer la différence de deux vecteurs, il suffit d'additionner au premier vecteur l'opposé du second.

UTILISATION D'UNE CALCULATRICE POUR LES PROBLEMES DE NAVIGATION

La calculatrice CASIO "FX JUNIOR PLUS"

Il s'agit d'une calculatrice simple, non programmable, mais permettant le calcul fractionnaire "intelligent" et les manipulations sur les nombres sexagésimaux.

Les fonctions

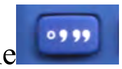
La calculatrice possède des fonctions classiques et des fonctions spéciales.

Fonctions classiques

Ce sont bien sûr les opérations simples sur les nombres entiers ou décimaux, en notation naturelle ou faisant appel aux puissances de 10. Cette calculatrice permet également la mise en mémoire de constantes (opérations répétitives), ainsi que la fonction "racine carrée", qui sera utilisée dans le calcul de la portée d'un phare

Fonctions spéciales

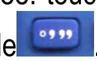
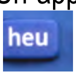
Nombres sexagésimaux

La touche  permet de stocker des nombres sexagésimaux, que la forme soit en degrés, minutes ou secondes ou heures, minutes et secondes. L'utilisation est relativement simple: après avoir introduit au clavier la valeur d'une "tranche", il faut appuyer sur cette touche Si la valeur de la tranche est nulle, il faut cependant la rentrer comme "0" et non sauter son stockage.

Les trois touches suivantes: 

permettent de transformer une valeur entrée sous la forme précédente en valeur décimale.

Exemple: exprimer sous forme décimale, en heures, la quantité 2h 3min 27s.

On entre la valeur donnée: touche "2" suivie de , puis touche "3" suivie de  et enfin touches "2" puis "7" suivie de .. Il apparaît alors sur la première ligne de l'affichage l'indication **2°3°27°**. Un appui sur la touche  fait alors apparaître sur la ligne du bas l'indication **2h3'27"**. Un appui sur 

affiche la valeur décimale en heures: **2,0575^{h}**; l'appui sur 

atteint la valeur en minutes: **123,45'** .et enfin 

:donne **7407"** .

Fonctions fractionnelles

Division euclidienne

La touche ⊦ est le symbole de la division euclidienne, dite aussi division entière. C'est une division qui ne fait appel qu'à des nombres entiers, sous forme de quotient et de reste.

Exemple: exprimez 189 minutes en heures et minutes:

On entre "189", puis on appuie sur ⊦ et ensuite sur 60; le résultat s'affiche Q=3 R=9; le résultat est donc 3 heures et 9 minutes..

Réduction de fractions

Elle est symbolisée par d/c, et permet la "simplification" de fractions.

Exemple: simplifier 78/9. On tape "78", le symbole d/c et enfin "9". La fraction initiale est indiquée sur la ligne supérieure, la fraction simplifiée sur la ligne inférieure.

Cette fonction permet également de réduire deux fractions au même dénominateur pour, par exemple, en effectuer l'addition.

Exemple: effectuer 1/3 + 1/11. On entre la première fraction sous la forme "1";d/c; "3" puis le signe de l'addition et enfin la deuxième fraction sous une forme similaire. L'appui sur = permet d'obtenir le résultat, soit 14/33

Extraction de partie entière

La touche a+b/c ↔d/c permet d'extraire la partie entière d'une fraction.

Exemple: Partie entière de la fraction 41/11. On entre "41", le symbole de la fraction d/c puis le dénominateur "11"; l'appui sur = affiche la fonction telle qu'elle a été entrée; l'appui sur la touche a+b/c ↔d/c affiche alors la partie entière (3) suivie du symbole de séparation (⅃), puis le numérateur (8) du reste fractionnaire, séparé de son dénominateur par le même symbole ⅃.

On peut utiliser cette fonction pour transformer des minutes en heures et minutes, comme plus haut. En introduisant la fraction 189/60 et en la convertissant, l'affichage produit 3⅃9⅃60, soit 3h 9min.

Conversion fraction – valeur décimale

Lorsqu'une fraction est affichée sur la ligne inférieure, l'appui sur F↔D permet de calculer la valeur décimale de cette fraction.

Applications

Différence entre deux heures

Quelle est la durée qui sépare 12h13min14s de 18h4min48s?

On entre les données en se servant de la touche ° ' '', en utilisant le signe − entre les deux groupes; le résultat apparaît immédiatement: 5h 51' 34" (à noter que cette écriture est scientifiquement incorrecte, les signes ' et " ne devant être utilisés que pour les minutes et secondes d'angle).

NB: si on trouve un résultat négatif (exemple: entre 23h et 5h), il suffit d'y ajouter 24h sous le format "heures/minutes/secondes" pour avoir la véritable valeur.

Division d'heures par un nombre

Quelle est la valeur du 1/6 de cet intervalle?

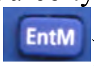
Il suffit d'appuyer sur le signe de la division , puis le chiffre 6 et le symbole  pour obtenir l'affichage du résultat: 0h 58' 35,67"

Le même travail peut s'appliquer sans difficultés aux multiplications d'heures par un nombre réel.

Somme d'heures

Que vaut la somme de cette valeur et de la première heure (12h13min14s)?

Il suffit d'appuyer sur , de rentrer l'heure comme plus haut et d'appuyer sur  pour obtenir le résultat.

Si on avait prévu ce type de calcul, on aurait pu mettre la valeur de la première heure en mémoire (appui sur ) et l'utiliser directement avec 

Division d'heures par des heures

On peut rechercher le rapport (nombre réel) entre deux données type heure. Par exemple, si on veut savoir quelle fraction de 1h18min44s représente 0h28min34s, on entre 0°28°34°1°18°34° puis , qui permet de connaître la résultat: 0,363597…

Application complète: problèmes de marée[2]

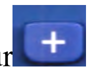
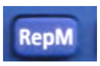
Partie 1

On apprendra plus tard que, pour calculer des hauteurs de marées, il faut calculer la différence entre les heures de deux marées consécutives, en calculer le sixième puis ajouter ce sixième à l'heure de la marée la plus précoce; la valeur ainsi obtenue est augmentée du sixième déjà calculé et ainsi de suite de façon à atteindre la deuxième heure donnée. Pour cela, on fait appel à ce qu'on a vu plus haut et aux possibilités de stockage en mémoire, en sachant que les mémoires F1 et F2 ne permettant pas le stockage de valeurs sexagésimales.

En reprenant les données ci-dessus: Marée 1 à 12h13min14s et marée 2 à 18h04min48s:

On calcule la différence 18°04°48°-12°13°14° qui donne 5h51'34"

On divise cette valeur par 6 et on stocke ce résultat dans la mémoire: Attention à ne pas appuyer sur la touche "égale" après la division par 6, car le résultat stocké dans la mémoire serait faux. De manière générale, il faut toujours avoir une estimation de la valeur recherchée pour vérifier grossièrement ses calculs. Ici, le sixième de 5h51'34" est aux alentours de 1h; l'écran indique: 0h58'35,67" qui correspond à la valeur estimée.

On introduit ensuite au clavier la valeur de la première marée: 12°13°14° et on y ajoute la valeur de M par l'appui sur puis  et enfin ; on obtient alors 13h11'49,67". On recommence la même procédure qui donne 14h10'25,33" et, de manière répétitive, on obtient

[2] L'utilisation de cette calculatrice dans les problèmes de marées fait l'objet d'un chapitre spécial (annexe D) qui sera mis en ligne en temps utile…

successivement 15h9'1"; 16h7'36,67"; 17h6'12,33" et enfin 18h4'48", qui est bien la valeur de la deuxième marée.

Nota: Si on veut 0,45 fois la valeur en mémoire, il faut commencer par introduire la valeur 0,45 puis le symbole de la multiplication  *et enfin* .

Partie 2

On aimerait savoir ce qui se passe à 16h30min. On verra par la suite qu'il est important de calculer la différence entre l'heure inférieure la plus proche de 16h30, calculée plus haut, et cette donnée, puis de connaître le rapport entre cette différence et le sixième, déjà calculé… et toujours en mémoire.

On regarde en premier quelle est, parmi les heures calculées plus haut, celle qui dont la valeur est la plus proche de 16h30, tout en étant inférieure; c'est à l'évidence 16h7'36,67" qu'on ramène à 16h7min37s. On calcule alors 16°30°0°-16°7°37°, qui donne, après appui sur  la valeur **0h22'23"**; on appuie ensuite sur   qui donne le quotient recherché, soit 0,382. La différence calculée est donc 0,382 fois la valeur du "sixième".

Les autres applications "marines" (portée d'un phare, divisions…) seront vues au fur et à mesure.

PLAN DU PREMIER COURS " MISE A NIVEAU"